数字图像处理

数字图像的频域变换

赵启军
qjzhao@scu.edu.cn
四川大学计算机学院

知识回顾

数字图像变换

灰度变换

-- 代数运算、在灰度域进行

-- 如加、减、乘、除等

-- 改变图像的对比度、目标与背景分离等

几何变换

-- 几何运算、在空间域进行

-- 如平移、缩放、旋转等

-- 改变图像中物体的位置、形状等

频域变换

-- 将图像从灰度空间变换到其它空间

-- 如通过Fourier变换到频率域

-- 可以用于特征提取、压缩编码、提高计算效率等

练习

- 编写程序实现图像的旋转

方案一：扩大图像尺寸，
以保留图像全部内容

方案二：保持图像尺寸，
部分图像内容会丢失

练习：方案一

- 输入：原始图像I_0, 旋转中心(x_c, y_c), 旋转角度θ
- 输出：旋转后图像I_1

计算I_0高度和宽度：H、W
旋转I_0的四个顶点确定旋转后图像的大小：H_1、W_1
计算旋转后的平移量：d_x, d_y
初始化旋转后图像I_1：$I_1(1:H_1,1:W_1)=0$
for I_0上每一个像素点(x_0,y_0)
　　计算旋转后坐标(x_1,y_1)并取整
　　$I_1(x_1,y_1)=I_0(x_0,y_0)$
end
确定I_1上有效图像区域中未赋值像素点，并用最近邻法插值
　　逐行扫描I_1的像素点，记录每行最左和最右有效像素位置p_L、p_R
　　自左向右处理p_L到p_R之间的像素点，如果没有赋值，则取其左侧相邻像素的灰度值

练习：方案二

- 输入：原始图像I_0, 旋转中心(x_c, y_c), 旋转角度θ
- 输出：旋转后图像I_1

计算I_0高度和宽度：H、W

初始化旋转后图像I_1：$I_1(1{:}H,1{:}W)=0$

for I_1上每一个像素点(x_1,y_1)

    计算其在原始图像I_0上的位置(x_0,y_0)

    if (x_0,y_0)在I_0的有效范围内

        if (x_0,y_0)均为整数

            $I_1(x_1,y_1)=I_0(x_0,y_0)$

        else

            使用双线性插值计算$I_1(x_1,y_1)$

        end

    end

end

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = {} & [f(1,0)-f(0,0)]x+[f(0,1)-f(0,0)]y \\
& +[f(1,1)+f(0,0)-f(0,1)-f(1,0)]xy+f(0,0)
\end{aligned}
$$

本讲内容

- 图像频域变换的基本概念
- 典型的图像频域变换方法
  - FFT、DCT、小波变换等
- 图像频域变换的应用

图像频率的基本概念（1）

- 我们通过什么感知到图像中的物体？

灰度或色彩的空间分布形成的边缘、轮廓、结构

图像频率的基本概念（2）

- 为什么会感知到边缘？

灰度变化较大/较快的地方形成边缘

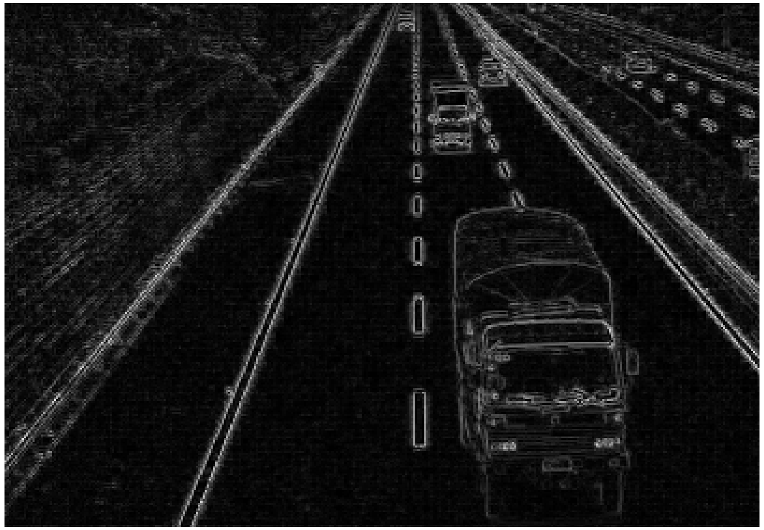
图像的空间频率反映了图象的灰度或色彩随着空间坐标变化而变化的快慢

- 变化平缓的图像频带窄、变化剧烈的图像频带宽
- 图像中的高频分量——边缘和细节部分
- 图像中的低频分量——背景和缓慢变化部分

图像频域变换的目的（1）

原始图像

高频分量图像



- 通过频域变换可以将图像中的不同对象按高频和低频分量分别进行处理
  - 比如通过增强高频分量来提取图像的边缘信息

图像频域变换的目的（2）

- 图像频域变换的一般形式

空间域

$f(x,y)$

正变换

$$g(u,v)=T\big(f(x,y)\big)$$

$$f(x,y)=T^{-1}\big(g(u,v)\big)$$

逆/反变换

频率域/变换域

$g(u,v)$

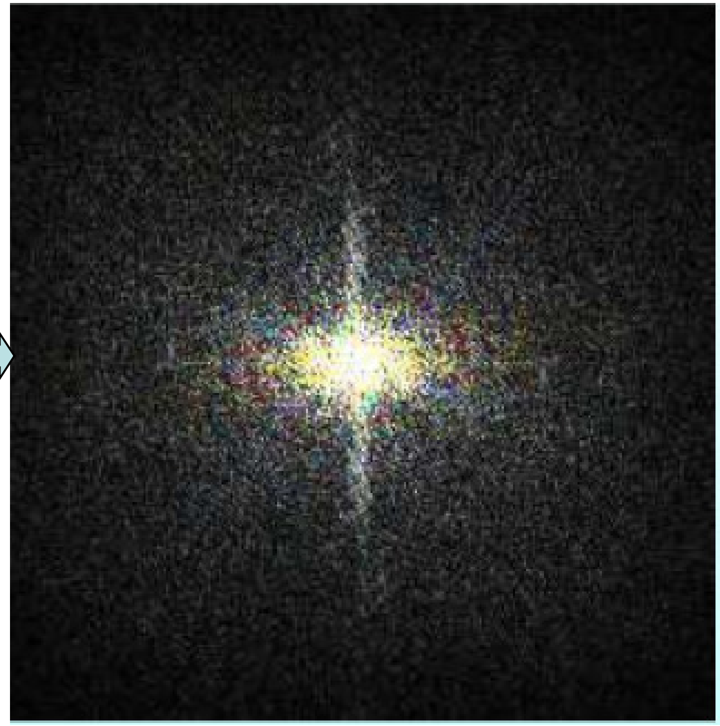
- 在频率/变换域中进行图像处理的优势
  - 可以使某些特征更突出，便于分析和识别
  - 可以更有效地表示图像，实现压缩和编码
  - 可以简化计算，如通过频率域的乘积实现空间域的卷积

图像滤波与卷积（1）

- 一幅图像由多种不同频率分量的信号构成

原始图像

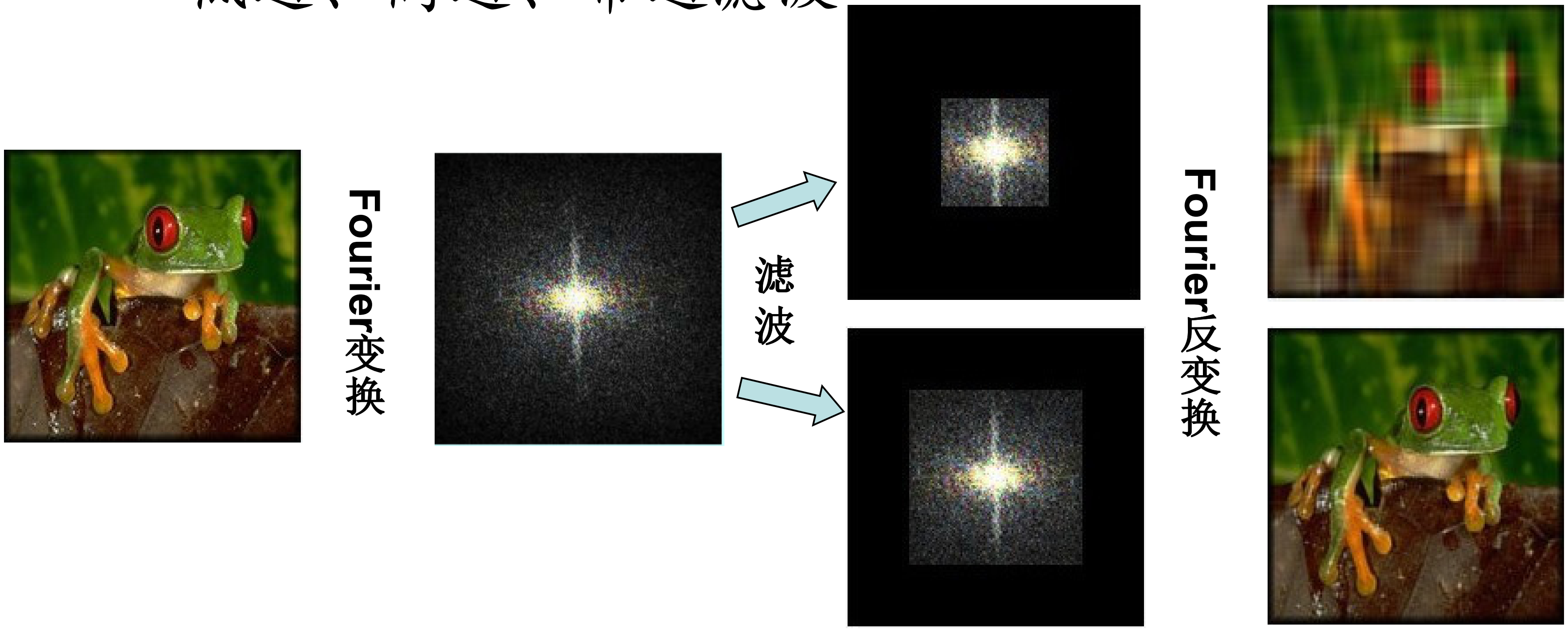
Fourier
变换



Fourier频谱图
（幅值）

图像滤波与卷积（2）

- 所谓图像滤波在频域就是仅保留指定频段的信号，而去除其余信号
  - 低通、高通、带通滤波



图像滤波与卷积（3）

- 根据线性系统理论，用一个二维函数对另一个二维函数（图像）进行滤波的结果是这两个二维函数的**卷积**

$$f(x,y) \longrightarrow \boxed{g(x,y)} \longrightarrow z(x,y)$$

$$z(x,y)=f(x,y)*g(x,y)$$

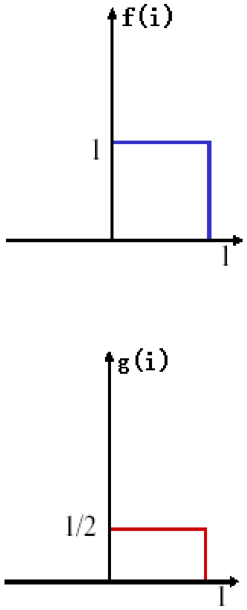
*表示卷积运算

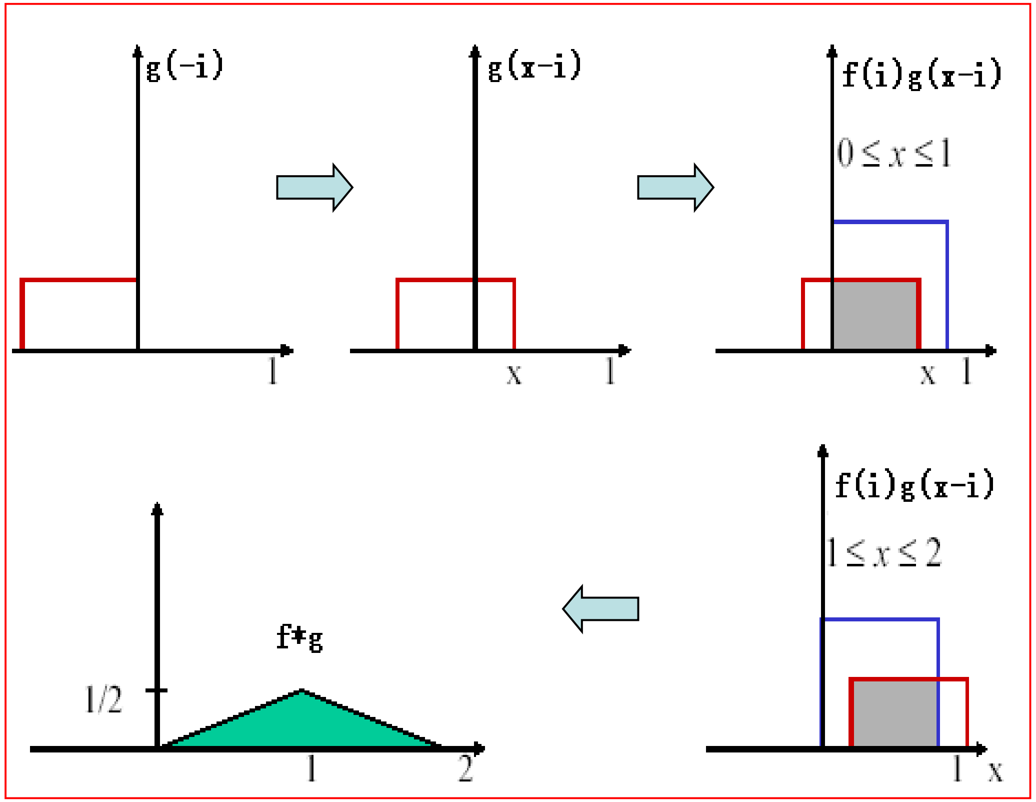
二维数字图像卷积 $z(i,j)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} f(k,l)g(i-k,j-l)$

图像滤波与卷积（4）

- 以一维函数卷积为例。假设f(x)(x=0,1...,A-1)以及g(x)(x=0,1,...,C-1)是两个有限离散函数，其线性卷积定义为

$$z(x) = f(x) * g(x) = \sum_{i=0}^{N-1} f(i)g(x-i) \qquad N = A + C - 1$$





Fourier变换（1）

- 二维离散Fourier变换(2dDFT)描述空间图像f(x, y)和它的频域图像F(u, v)之间的映射关系，其中u, v为空间频率坐标

正变换

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp[-j2\pi(ux/M+vy/N)]$$

$$u=0,1,\cdots,M-1,\quad v=0,1,\cdots,N-1,\quad j=\sqrt{-1}$$

反变换

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp[j2\pi(ux/M+vy/N)]$$

$$x=0,1,\cdots,M-1,\quad y=0,1\cdots,N-1$$

Fourier变换（2）

正变换

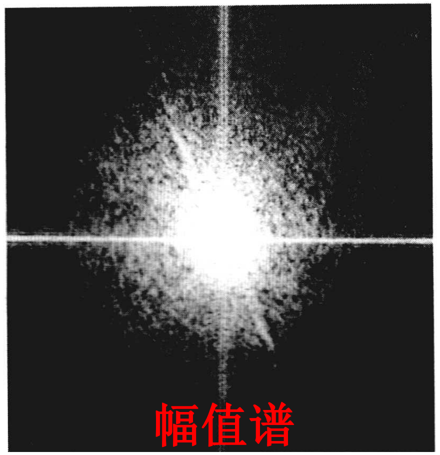
$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp[-j2\pi(ux/M+vy/N)]$$

$$u=0,1,\cdots,M-1,\quad v=0,1,\cdots,N-1,\quad j=\sqrt{-1}$$

- 二维离散Fourier变换(2dDFT)的结果是复数

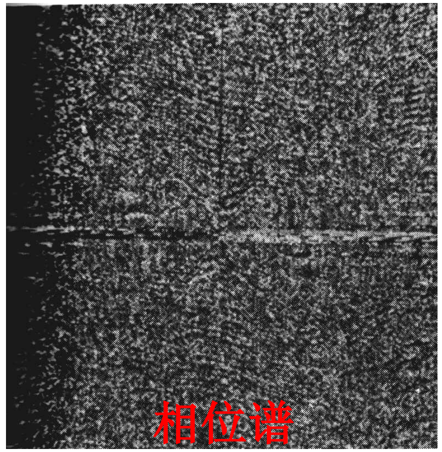
$$F(u,v)=R(u,v)+j\cdot I(u,v)$$

原始图像



幅值谱

|F(u,v)|



相位谱

arctg(*I*(u,v)/*R*(u,v))

Fourier变换（3）

反变换

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp[j2\pi(ux/M+vy/N)]$$

$$x=0,1,\cdots,M-1,\quad y=0,1\cdots,N-1$$

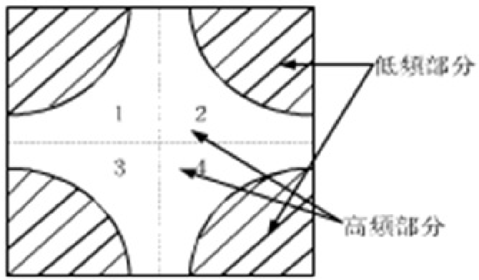
- 图像f(x, y)可以表示为许多不同频率的正弦函数和余弦函数的加权和，权值F(u, v)就是Fourier变换系数
- Fourier变换将图像的灰度分布函数变换为图像的频率分布函数，傅立叶逆变换是将图像的频率分布函数变换为灰度分布函数

Fourier变换频域图上的每个点和空间域的原始图像的每个象素点具有一一对应关系吗？

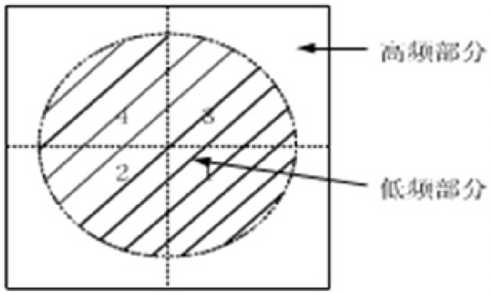
Fourier变换（4）

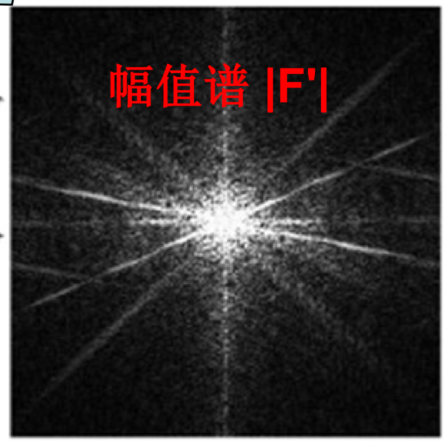
- Fourier变换示例（Matlab实现）

F = fft2(I)



F' = fftshift(F)





将频谱图的低频部分移动到图像中心

Fourier变换的性质（1）

- 平移不变性
  - 在空域中，图像原点平移到(x0，y0)时，其对应的频谱F(u, v)要乘上一个负的指数项

$$f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)\exp\left(-j2\pi\frac{ux_0+vy_0}{N}\right)$$

  - 当空域中f(x, y)产生移动时，在频域中只发生相移，而Fourier变换的幅值不变

$$|F(u,v)e^{-j2\pi(ux_0+vy_0)}|=|F(u,v)|$$

  - 以Fourier变换的幅值作为特征具有平移不变性

Fourier变换的性质（2）

- 旋转不变性

如果引入极坐标 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\begin{cases} u = \omega\cos\varphi \\ v = \omega\sin\varphi \end{cases}$

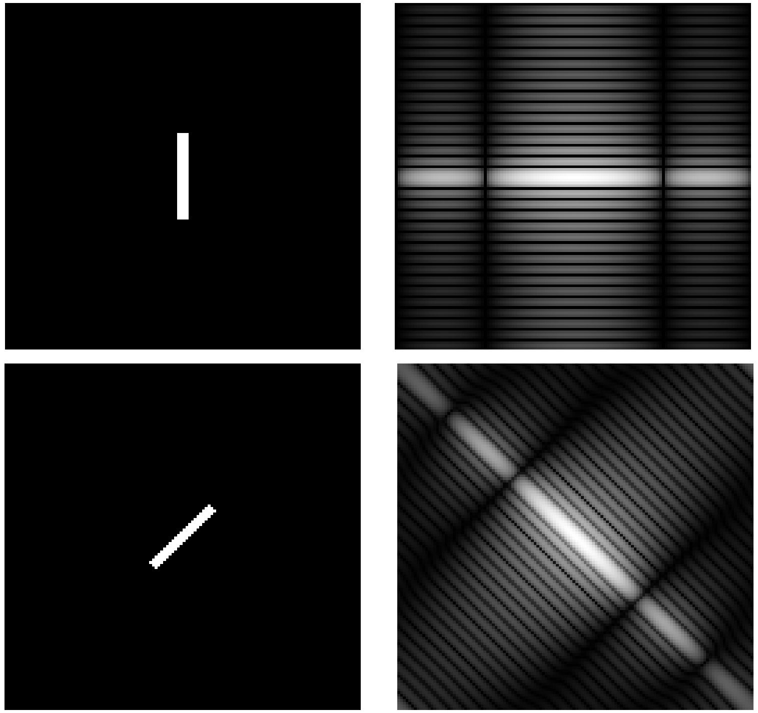
则f(x, y)和F(u, v)分别变为f(r, θ）和F(ω ，φ)

在极坐标系中，存在以下变换对

$$f(r,\theta+\theta_0) \Leftrightarrow F(\omega,\varphi+\theta_0)$$

Fourier变换的性质（3）

- 旋转不变性



空间域函数f(x,y)旋转θ_0角度后，相应的Fourier变换F(u,v)在频域中也旋转同一θ_0角，反之，F(u,v)在频域中旋转θ_0角，其反变换f(x,y)在空间域中也旋转θ_0角

Fourier变换的性质（4）

- 卷积定理

设f和g的Fourier变换结果分别为F和G，即

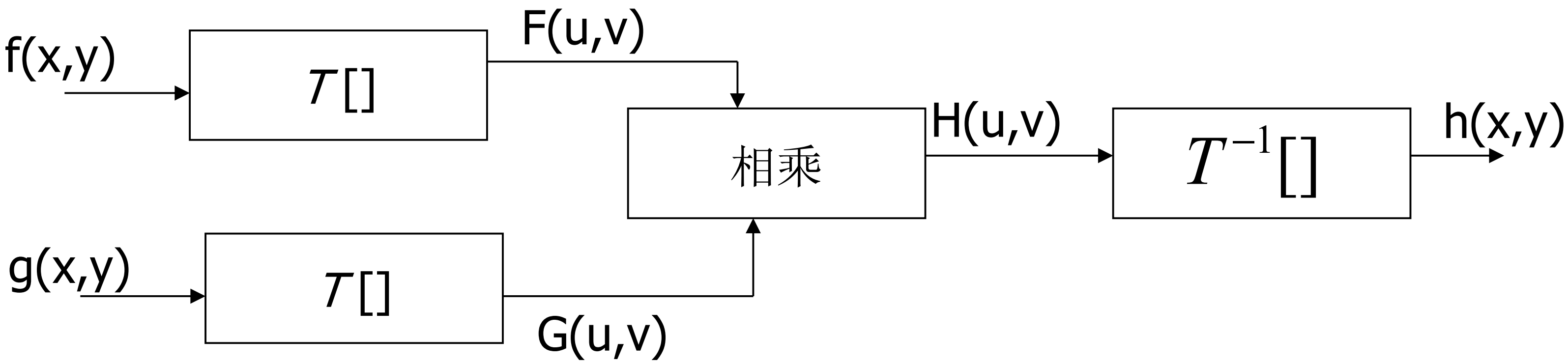
$$f(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) \qquad\qquad g(x,y) \Leftrightarrow G(u,v)$$

则

$$f(x,y) * g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) \cdot G(u,v)$$
$$f(x,y) \cdot g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) * G(u,v)$$

Fourier变换的性质（5）

- 卷积定理



空间域的卷积可以通过Fourier频率域的乘积实现，从而降低计算的复杂度，提高效率（Fourier变换有快速算法，即FFT）

离散余弦变换（1）

- 离散余弦变换(Discrete Cosine Transform-简称DCT)是Fourier变换的一种特殊情况
- 其变换核是为实数的余弦函数，因而DCT的计算速度比DFT快得多
- DCT计算复杂性适中，又具有可分离特性，还有快速算法，所以被广泛地用在图象数据压缩编码算法中，如JPEG、MPEG-1、MPEG-2及H.261等压缩编码国际标准都采用了离散余弦变换编码算法

离散余弦变换（2）

- 离散余弦变换正变换

$$F(0,0)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$$

$$F(0,v)=\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cdot\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

$$F(u,0)=\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cdot\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}$$

$$F(u,v)=\frac{2}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cdot\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\cdot\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

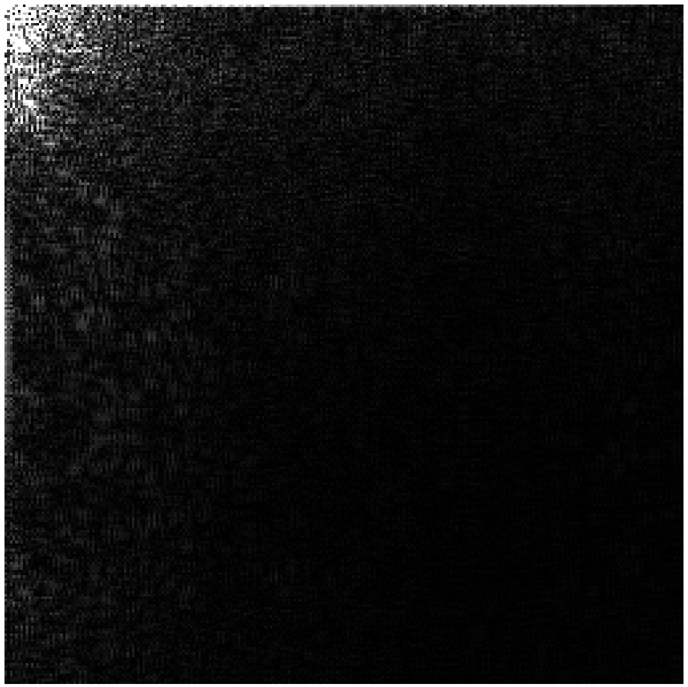
- 离散余弦变换反变换

$$\begin{aligned}f(x,y)=&\frac{1}{N}F(0,0)+\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{v=1}^{N-1}F(0,v)\cdot\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\\&+\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{u=1}^{N-1}F(u,0)\cdot\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\\&+\frac{2}{N}\sum_{u=1}^{N-1}\sum_{v=1}^{N-1}F(u,v)\cdot\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\cdot\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\end{aligned}$$

离散余弦变换（3）

原始图像

DCT频谱图

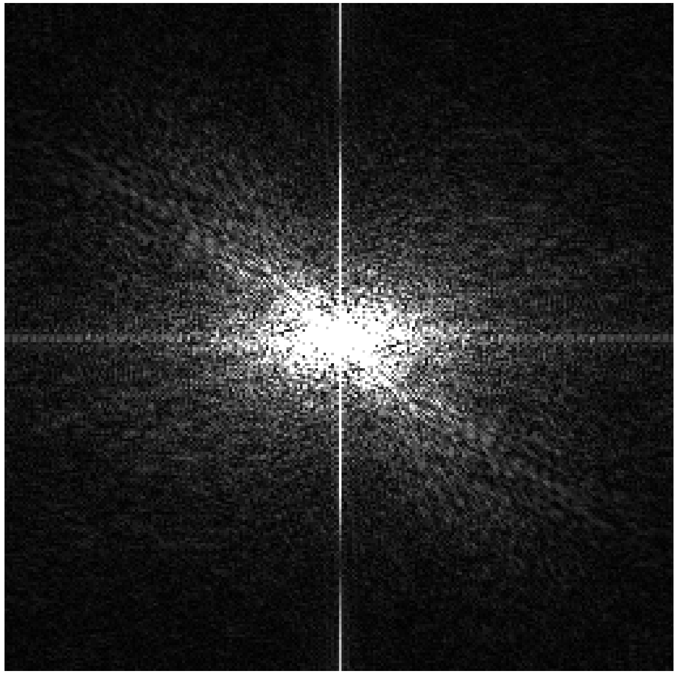


DCT变换频域图上的每个点和空间域的原始图像的每个象素点具有一一对应关系吗？

小波变换（1）

- Fourier频谱图中的每一个点的值取决于原始图像中的所有点，因此不具有空间上的局部分析能力，且在高频低频的分辨率不变

原始图像

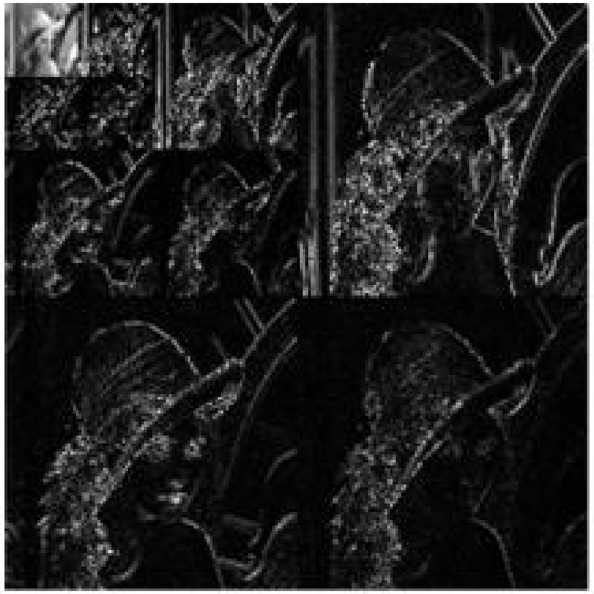


FFT幅值谱

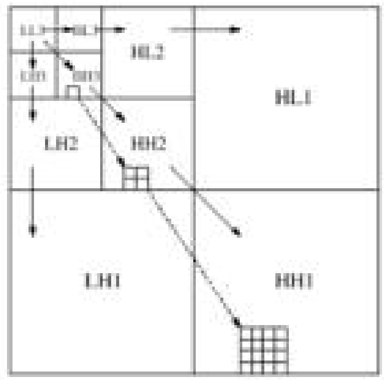
小波变换（2）

- 小波变换（Wavelet）克服了Fourier变换的上述缺点，同时具有空域和频域上的局部分析能力，且支持对不同频率段的多尺度分析

原始图像



小波分解



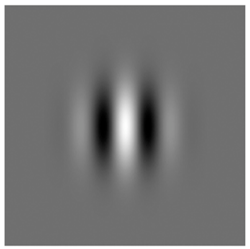
2D DWT

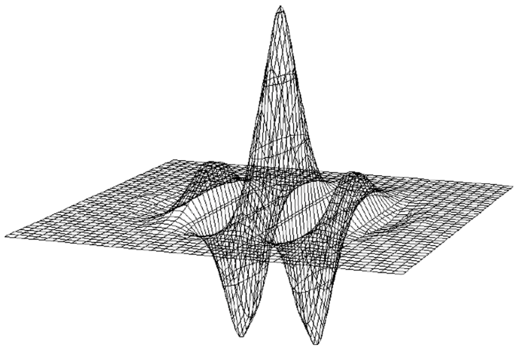
小波变换（3）

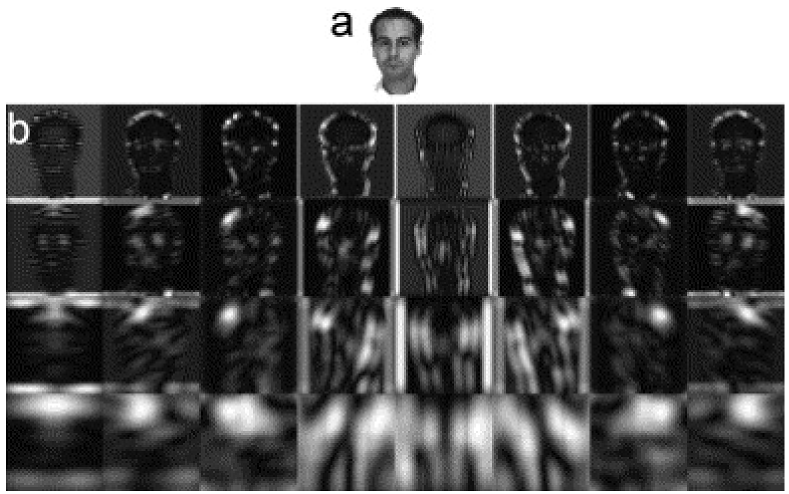
- Gabor小波（Gabor滤波）是图像处理和模式识别中最常用的小波变换之一

$$g(x,y;\lambda,\theta,\psi,\sigma,\gamma)=\exp\left(-\frac{x'^2+\gamma^2y'^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(i\left(2\pi\frac{x'}{\lambda}+\psi\right)\right)$$

$$x'=x\cos\theta+y\sin\theta \qquad y'=-x\sin\theta+y\cos\theta$$

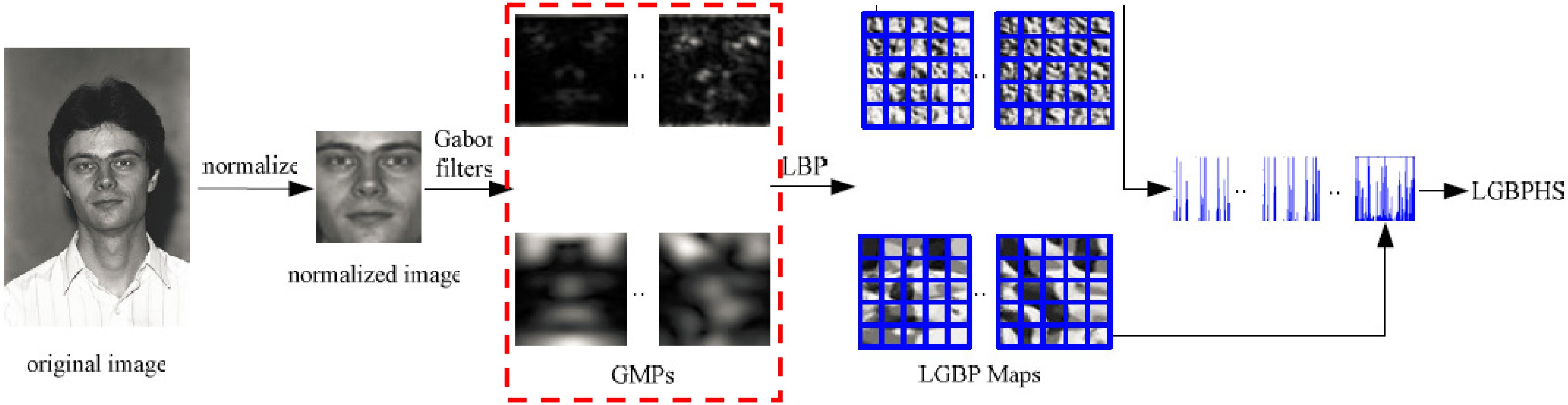






数字图像频域变换的应用（1）

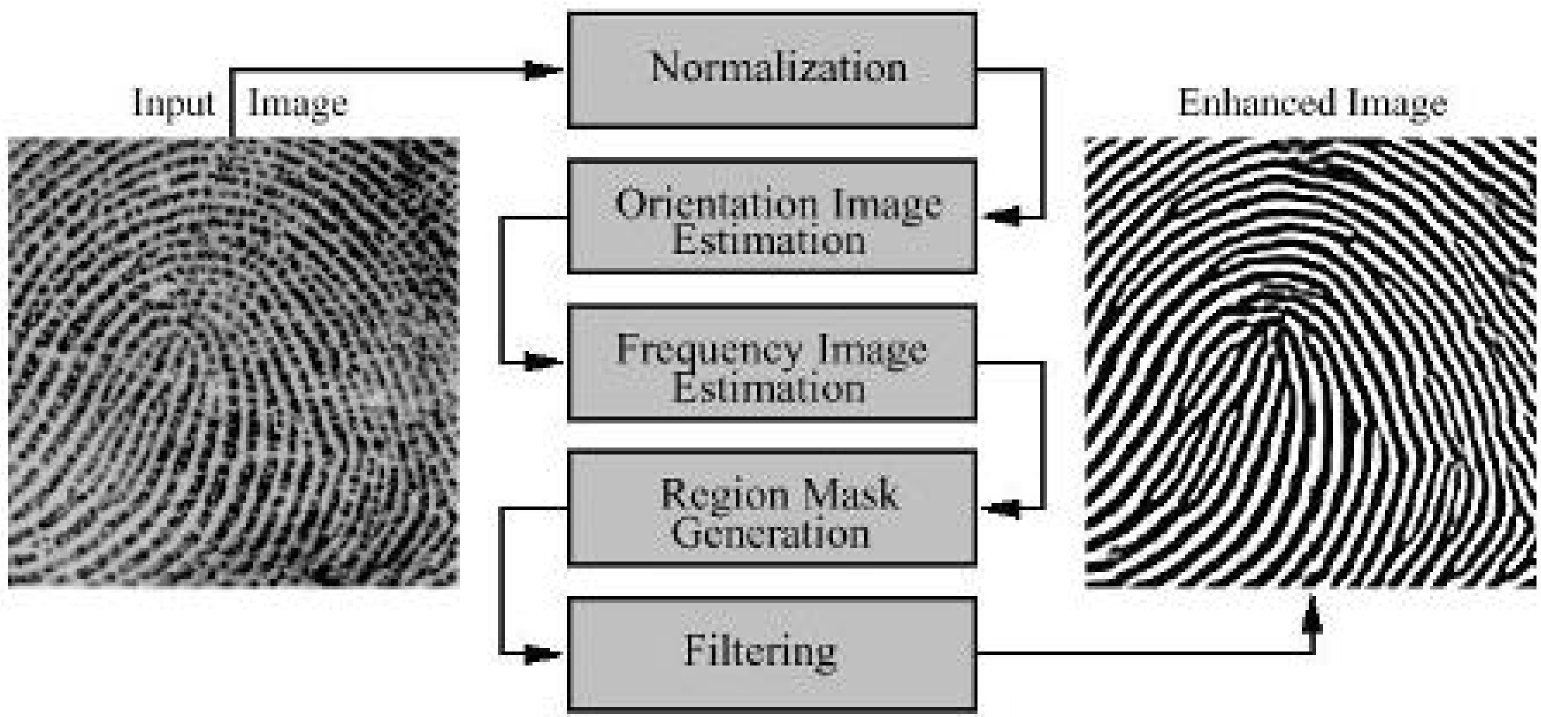
- 图像特征提取
  - 在变换域中提取图像特征



W. Zhang, et al., "Local Gabor Binary Pattern Histogram Sequence (LGBPHS): A Novel Non-Statistical Model for Face Representation and Recognition," Proceedings of The Tenth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'05)

数字图像频域变换的应用（2）

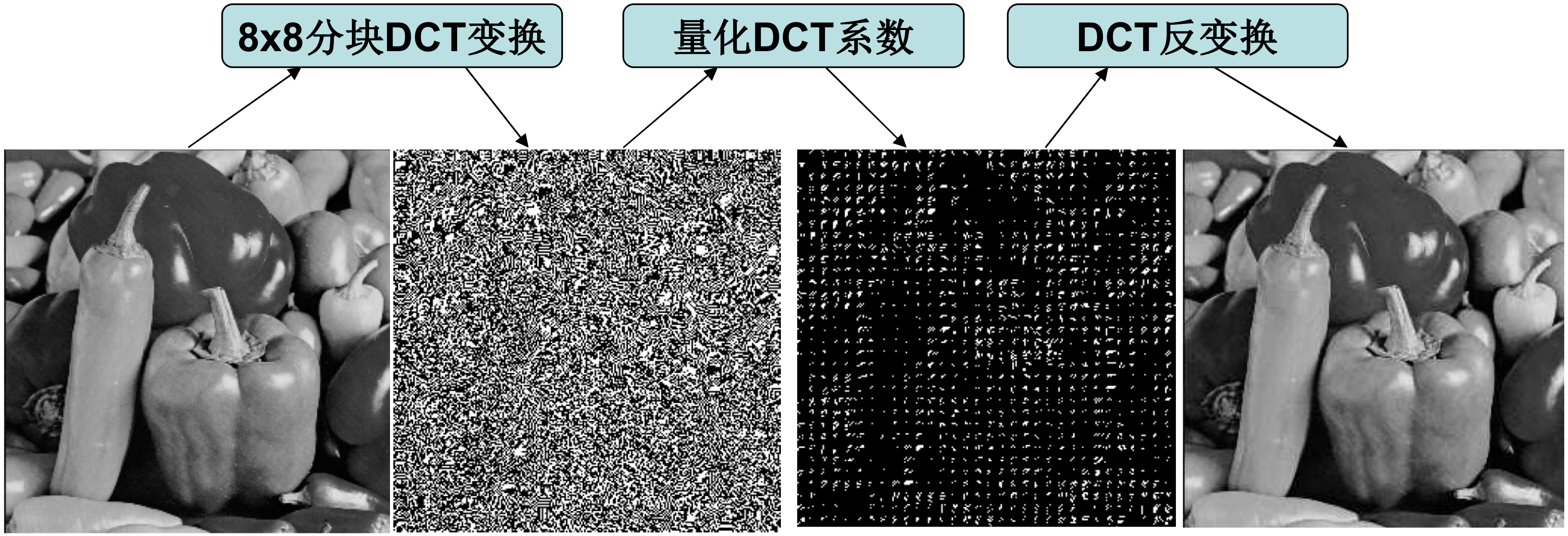
- 图像去噪增强
  - 噪音一般属于高频信号



L. Hong, Y. Wan, and A. K. Jain, "Fingerprint Image Enhancement: Algorithm and Performance Evaluation," IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 20(8): 777-789 (1998)

数字图像频域变换的应用（3）

- 图像压缩编码
  - 舍弃接近0的变换系数、或者量化变换系数

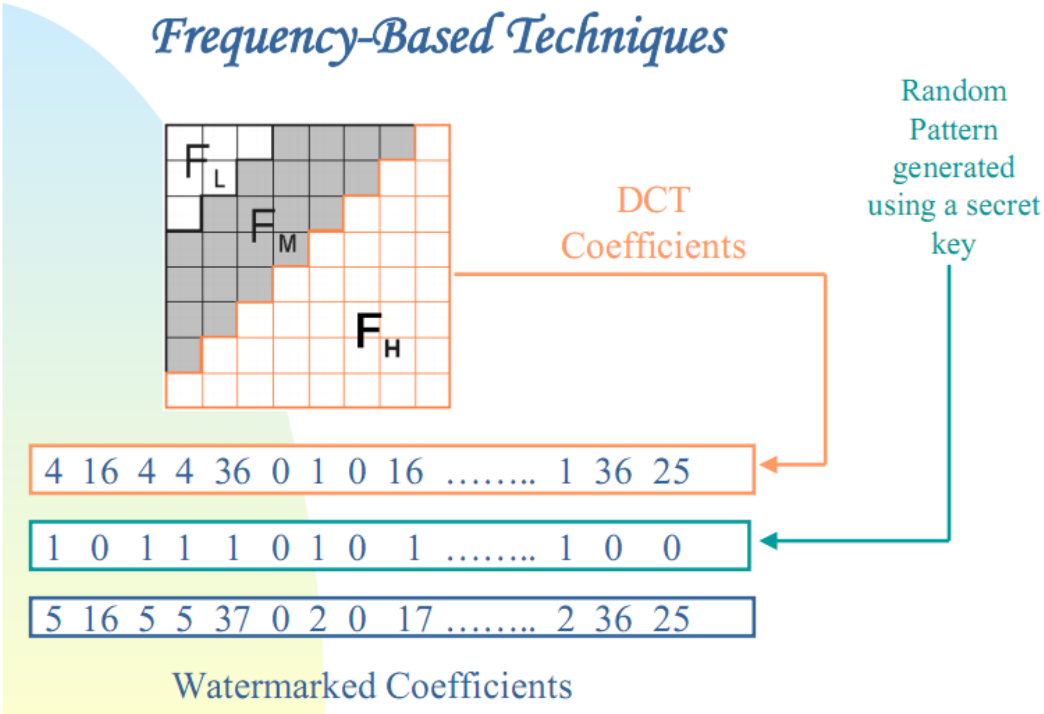


原始图像　　DCT系数　　量化后DCT系数　　DCT压缩图像

数字图像频域变换的应用（4）

- 图像数字水印
  - 将秘密信息加载到中低频分量中不会明显影响图像的视觉效果，可用于版权保护、完整性保护

原始图像



加水印后图像